1. ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование (ЛП) – это метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения строго линейны.

ЛП успешно применяется в военной области, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и даже в социальных науках.

Задача, в которой требуется найти экстремум функции

$$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; i = \overline{1,m}, \;\; m \le n,$$

называется **задачей линейного программирования**.

Задача в краткой записи имеет вид

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min),$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, & i = \overline{1,k}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, & i = \overline{k+1,m}, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; m \le n.$$

1.1. Модели линейного программирования с двумя переменными

Пример 2.1. Компания Mikks производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов C1 и C2. Следующая таблица представляет основные данные для задачи.

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	Для наружных работ	Для внутренних работ	
Сырье C1	6	4	24
Сырье C2	1	2	6
Доход (в тыс. долл.) на тонну краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более, чем на 1 т аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить **оптимальное** (наилучшее) соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

Задача (модель) **линейного программирования** (**ЗЛП**), как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента.

1. **Переменные,** которые следует определить.
2. **Целевая функция,** подлежащая оптимизации.
3. **Ограничения,** которым должны удовлетворять переменные.

Определение переменных – первый шаг в создании модели. В нашем примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объемы как переменные модели:

x_1 - ежедневный объем производства краски для наружных работ;

x_2 - ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Используя эти переменные, далее строим целевую функцию. Логично предположить, что целевая функция, как суммарный ежедневный доход, должна возрастать при увеличении ежедневных объемов производства красок. Обозначим эту функцию через z (она измеряется в тысячах долларов) и положим, что $z = 5x_1 + 4x_2$.

В соответствии с целями компании получаем задачу:

Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$, или $z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow max$.

Итак, остался не определенным последний элемент модели - условия (ограничения), которые должны учитывать ограниченные возможности ежедневного потребления сырья и ограниченность спроса на готовую продукцию. Другими словами, ограничения на сырье можно записать следующим образом.

$$\begin{pmatrix} \text{Используемый объем} \\ \text{сырья для производства} \\ \text{обоих видов краски} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{Максимально возможный} \\ \text{ежедневный расход сырья} \end{pmatrix}$$

Из таблицы с данными имеем следующее.

Используемый объем сырья $C1 = 6x_1 + 4x_2$ (т)

Используемый объем сырья $C2 = 1x_1 + 2x_2$ (т)

Поскольку ежедневный расход сырья С1 и С2 ограничен соответственно 24 и 6 тоннами, получаем следующие ограничения.

$6x_1 + 4x_2 \le 24$ (сырье С1)

$x_1 + 2x_2 \le 6$ (сырье С2)

Существует еще *два ограничения* по спросу на готовую продукцию:

1) максимальный ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать 2 т, т.е. $x_2 \le 2$.
2) ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на одну тонну (разность между ежедневными объемами производства красок для внутренних и наружных работ не должна превышать одной тонны), т.е. $x_2 - x_1 \le 1$.

Еще *одно неявное ограничение* состоит в том, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными.

Таким образом, к сформулированным выше ограничениям необходимо добавить ***условие неотрицательности*** переменных: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Окончательно задача будет записана следующим образом:

Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$ (или $z = 5x_1 + 4x_2 \to max$)
при выполнении следующих ограничений:
$6x_1 + 4x_2 \le 24,$
$x_1 + 2x_2 \le 6,$
$-x_1 + x_2 \le 1,$
$x_2 \le 2,$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Любое решение, удовлетворяющее ограничениям модели, является **допустимым**. Например, решение $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ будет допустимым, так как не нарушает ни одного ограничения, включая условие неотрицательности. Чтобы удостовериться в этом, подставьте значения $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ в левые части неравенств системы ограничений и убедитесь, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$ (тысяч долларов).

Итак, задача сформулирована.

Теперь встает вопрос о нахождении **оптимального допустимого решения**, доставляющего максимум целевой функции. После некоторых раздумий приходим к выводу, что задача имеет много (фактически, бесконечно много) допустимых решений. По этой причине невозможна подстановка значений переменных для поиска оптимума, т.е. нельзя применить простой перебор всех допустимых решений. Следовательно, необходима эффективная процедура отбора допустимых решений для поиска оптимального.

1.2. Графическое решение ЗЛП

Графический способ решения задачи ЛП состоит из двух этапов.

1. Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели.

2. Нахождение оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

1.2.1. Нахождение максимума целевой функции

Используем модель, построенную для компании Mikks, чтобы показать два этапа графического решения ЗЛП.

Этап 1. *Построение пространства допустимых решений*.

Сначала проведем оси: на горизонтальной будут указываться значения переменной x_1, а на вертикальной - x_2 (рис. 2.1). Далее рассмотрим условие неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Эти два ограничения показывают, что пространство допустимых решений будет лежать в первом квадранте.

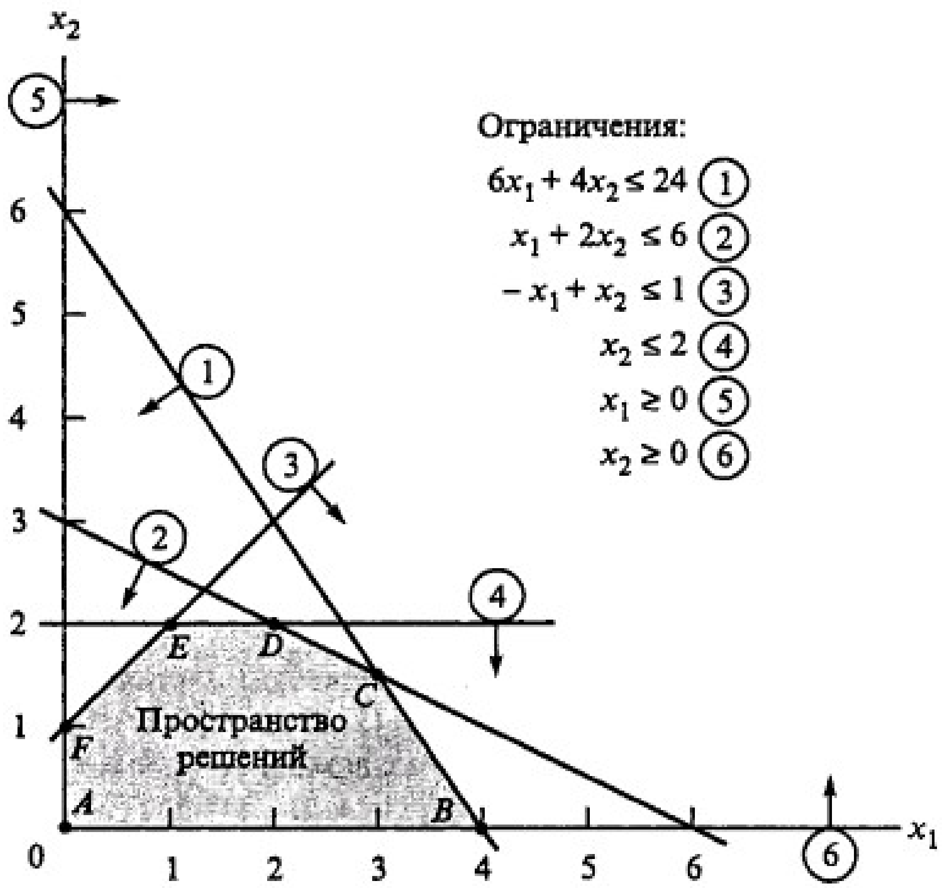


Рис. 2.1. Пространство допустимых решений модели

Чтобы учесть оставшиеся ограничения, проще всего заменить неравенства на равенства, в результате чего получим уравнения прямых, а затем на плоскости провести эти прямые. Например, неравенство $6x_1 + 4x_2 \le 24$ заменяется уравнением прямой $6x_1 + 4x_2 = 24$. Эта прямая обозначена на рис. 2.1 как линия (1).

Этап 2. *Нахождение оптимального решения.*

Точки пространства допустимых решений, показанного на рис. 2.1, удовлетворяют одновременно всем ограничениям. Это пространство ограничено отрезками прямых, которые соединяются в угловых точках *A, B, C, D, E* и *F.* Любая точка, расположенная внутри или на границе области, ограниченной ломаной *ABCDEF,* является допустимым решением, т.е. удовлетворяет всем ограничениям. Поскольку пространство допустимых решений содержит бесконечное число точек, необходима некая процедура поиска оптимального решения.

Нахождение оптимального решения требует определения направления возрастания целевой функции $z = 5x_1 + 4x_2$ (напомним, что мы *максимизируем* функцию z). Мы можем приравнять z к нескольким возрастающим значениям, например 10 и 15.

Эти значения, подставленные вместо z в выражение целевой функции, порождают уравнения прямых. Для значений 10 и 15 получаем уравнения прямых $5x_1 + 4x_2 = 10$ и $5x_1 + 4x_2 = 15$. На рис. 2.2 эти прямые показаны штриховыми линиями, а направление возрастания целевой функции - толстой стрелкой.

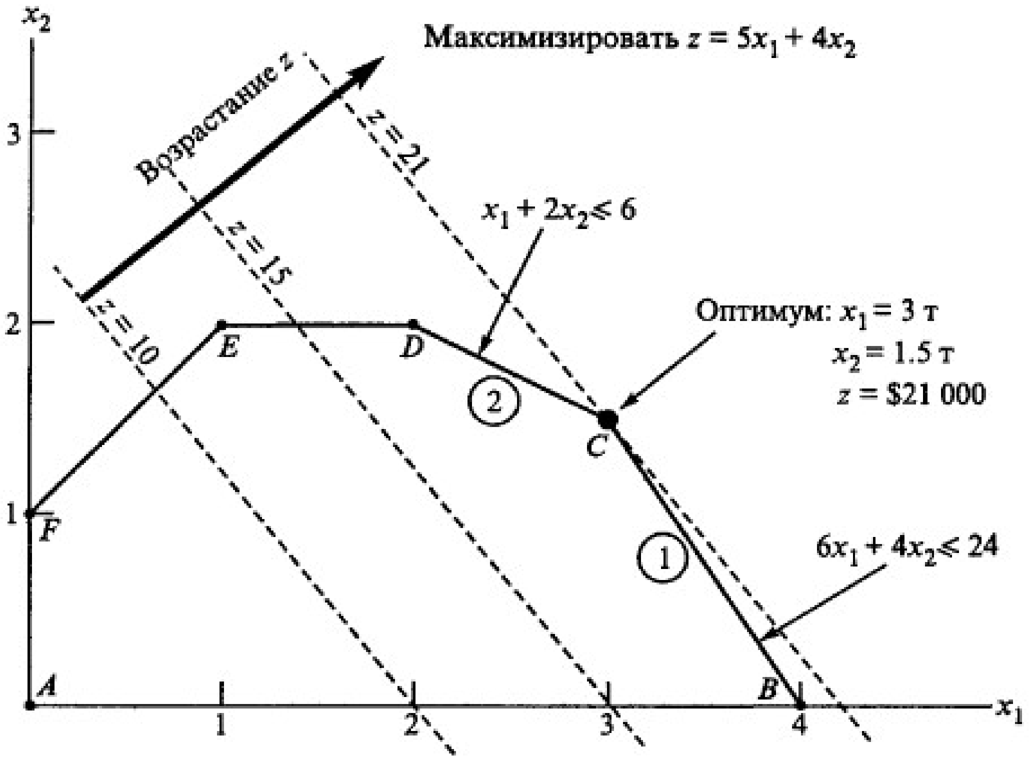


Рис. 2.2. Оптимальное решение модели

Целевая функция может возрастать до тех пор, пока прямые, соответствующие возрастающим значениям этой функции, пересекают область допустимых решений. Точка пересечения области допустимых решений и прямой, соответствующей максимально возможному значению целевой функции, и будет **точкой оптимума**.

На рис. 2.2 видно, что оптимальное решение соответствует точке C. Эта точка является местом пересечения прямых (1) и (2), поэтому ее координаты x_1 и x_2 находятся как решение системы уравнений, задающих эти прямые:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6. \end{cases}$$

Решением этой системы будет $x_1 = 3$ и $x_2 = 1.5$, при этом значение целевой функции равно $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1.5 = 21$.

Полученное решение означает, что для компании Mikks оптимальным выбором будет ежедневное производство 3 т краски для наружных работ и 1.5 т - для внутренних работ с ежедневным доходом в $21 000.

Не случайно, что оптимальное решение расположено в угловой точке пространства допустимых решений, где пересекаются две прямые. Если мы изменим наклон функции z (путем изменения ее коэффициентов), то обнаружим, что в любом случае решение достигается в одной из угловых точек (или одновременно в нескольких угловых точках). В этом и состоит основная идея построения общего *симплексного алгоритма,* который будет рассмотрен далее.

1.2.2. Нахождение минимума целевой функции

Пример 2.2. Задача о диете

Фармацевтическая фирма Ozark ежедневно производит не менее 800 кг некой пищевой добавки – смеси кукурузной и соевой муки, состав которой представлен в следующей таблице.

Мука	Белок	Клетчатка	Стоимость (в $ за кг)
	(в кг на кг муки)		
Кукурузная	0,09	0,02	0,30
Соевая	0,6	0,06	0,90

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30% белка и не более 5% клетчатки. Фирма Ozark хочет определить рецептуру смеси минимальной стоимости с учетом требований диетологов.

Поскольку пищевая добавка состоит только из кукурузной и соевой муки, переменными для этой задачи, очевидно, будут

x_1 - количество (в кг) кукурузной муки, используемой в дневном производстве пищевой добавки;

x_2 - количество (в кг) соевой муки, используемой в дневном производстве пищевой добавки.

Целевая функция равна общей стоимости пищевой добавки, производимой за один день, и должна быть минимальной. В данном случае это можно записать следующим образом:

Минимизировать $z = 0.3x_1 + 0.9x_2$ (или $0.3x_1 + 0.9x_2 \to min$)

Ограничения модели должны отражать производственные требования и рекомендации диетологов. Фирма должна выпускать не менее 800 кг смеси в день; соответствующее ограничение будет записано следующим образом: $x_1 + x_2 \geq 800$.

Рассмотрим ограничение, связанное с количеством белка в пищевой добавке. Общее количество белка в смеси, состоящей из x_1 кг кукурузной муки и x_2 кг соевой муки, равно $0.09x_1 + 0.6x_2$ (кг).

Это количество должно составлять не менее 30% от общего объема смеси $x_1 + x_2$. Отсюда получаем следующее неравенство: $0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$.

Аналогично строится ограничение для клетчатки:

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2).$$

В последних двух неравенствах переменные x_1 и x_2 надо перенести из правых частей в левые. Окончательно модель примет следующий вид.

Минимизировать $z = 0.3x_1 + 0.9x_2$ (или $0.3x_1 + 0.9x_2 \to min$) при ограничениях $x_1 + x_2 \geq 800,$ $0.21x_1 - 0.30x_2 \leq 0,$ $0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0,$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

На рис. 2.3 показано графическое решение этой задачи.

Поскольку в данной модели следует минимизировать целевую функцию, поэтому нужно идти в направлении уменьшения ее значений (это направление на рис. 2.3 показано стрелкой). Оптимальное решение находится на пересечении прямых $x_1 + x_2 = 800$ и $0.21x_1 - 0.30x_2 = 0$, откуда получаем $x_1 = 470.59$ (кг) и $x_2 = 329.41$ (кг).

При этих значениях переменных минимальная стоимость производимой ежедневно пищевой добавки составляет $z = 0.3 \cdot 470.59 + 0.9 \cdot 329.41 = \$437.65.$

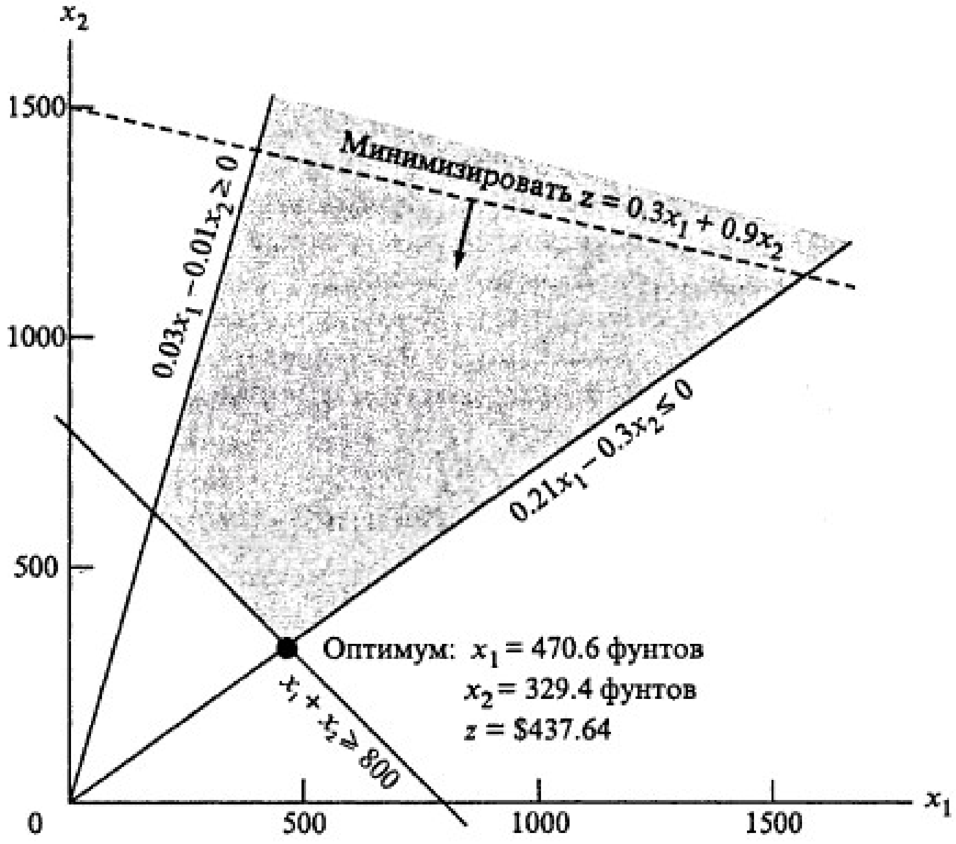


Рис. 2.3. Графическое решение задачи о диете

1.3. Компьютерное решение задач ЛП (при помощи Excel)

Проиллюстрируем на примере Mikks.
Составим в Excel следующую таблицу:

	A	B	C	D	E	F
1	Модель Mikks					
2	**Входные данные:**					
3		**x1**	**x2**			
4		**Внеш.**	**Внутр.**	**Всего**	**Ограничения**	
5	Целевая функция	5	4	0		
6	Ограничение 1	6	4	0	<=	24
7	Ограничение 2	1	2	0	<=	6
8	Ограничение 3	-1	1	0	<=	1
9	Ограничение 4	0	1	0	<=	2
10		>=0	>=0			
11	Выходные результаты:					
12		**x1**	**x2**	**z**		
13	Решение			0		

Здесь содержится 4 типа данных:

1) входные данные (ячейки B5:C9 и F6:F9),

2) значения переменных и целевой функции (ячейки в прямоугольнике B13:D13),
3) формулы, по которым вычисляются значения целевой функции и левых частей ограничений (ячейки D5:D9) и
4) поясняющие заголовки и надписи.

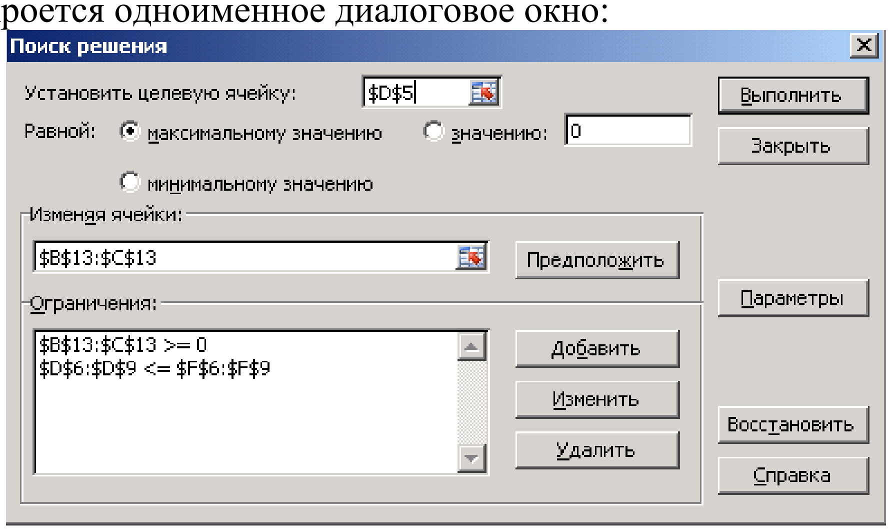
Для инструмента **Поиск решения** требуется информация только первых трех типов – поясняющие заголовки и надписи необходимы только для того, чтобы сделать табличное представление модели более понятным и удобочитаемым.

Покажем соответствие между математической моделью и табличной.

	Алгебраическая формула	**Формула Excel**	**Ячейка**
Целевая функция z	$5x_1 + 4x_2$	=B5*B$13+C5*C$13	D5
Ограничение 1	$6x_1 + 4x_2$	=B6*B$13+C6*C$13	D6
Ограничение 2	$x_1 + 2x_2$	=B7*B$13+C7*C$13	D7
Ограничение 3	$- x_1 + x_2$	=B8*B$13+C8*C$13	D8
Ограничение 4	x_2	=B9*B$13+C9*C$13	D9

После ввода исходных данных и расчетных формул табличная модель готова для использования средства **Поиск решения**.

Откроется одноименное диалоговое окно:



В этом окне надо ввести адрес ячейки, в которой вычисляется значение целевой функции, указать, надо ли минимизировать или максимизировать целевую функцию, и ввести адреса ячеек, содержащих значение переменных. В нашей модели:

- в поле ввода УСТАНОВИТЬ ЦЕЛЕВУЮ ЯЧЕЙКУ вводится D5;

- устанавливается переключатель РАВНОЙ МАКСИМАЛЬНОМУ ЗНАЧЕНИЮ;
- в поле ввода ИЗМЕНЯЯ ЯЧЕЙКИ вводится $B$13:$C$13.

Эта информация указывает средству ПОИСК РЕШЕНИЯ, что переменные находятся в ячейках B13 и C13, и надо найти максимум целевой функции, значение которой вычисляется в ячейке D5.

Далее надо задать ограничения модели, щелкнув на кнопке ДОБАВИТЬ в диалоговом окне ПОИСК РЕШЕНИЯ. Открывшееся диалоговое окно ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ предоставляет средства для ввода всех частей ограничений (левой части, знака неравенства и значения правой части). Используя это окно, вводим ограничения модели в таком виде: $D$6:$D$9<=$F$6:$F$9 (напомним, что в ячейках F6:F9 записаны значения правых частей ограничений).

Теперь осталось ввести ограничения неотрицательности для переменных. С помощью диалогового окна ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ вводим $B$13:$C$13>=0.

Когда ПОИСК РЕШЕНИЯ найдет решение этой задачи, оптимальное значение целевой функции появится в ячейке D5, а значения переменных x_1 и x_2 – в ячейках B13 и C13 соответственно.

Теперь все готово для решения нашей задачи, достаточно щелкнуть на кнопке ВЫПОЛНИТЬ в диалоговом окне ПОИСК РЕШЕНИЯ, для чего надо открыть диалоговое окно ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ, щелкнув на кнопке ПАРАМЕТРЫ.

Самое важное – установить опцию ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ. В этом же окне можно указать, что все переменные должны быть неотрицательными (опция Неотрицательные значения).

Результат работы:

	A	B	C	D	E	F
1	Модель Mikks					
2	**Входные данные:**					
3		**x1**	**x2**			
4		**Внеш.**	**Внутр.**	**Всего**	**Ограничения**	
5	Целевая функция	5	4	21		
6	Ограничение 1	6	4	24	<=	24
7	Ограничение 2	1	2	6	<=	6
8	Ограничение 3	-1	1	-1.5	<=	1
9	Ограничение 4	0	1	1.5	<=	2
10		>=0	>=0			
11	Выходные результаты:					
12		**x1**	**x2**	**z**		
13	Решение	3	1.5	21		

1.4. Двойственная задача и ее решение

Каждой задаче линейного программирования можно определённым образом поставить в соответствие некоторую другую задачу линейного программирования, называемую ***сопряжённой*** или ***двойственной*** по отношению к исходной или прямой. Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче линейного программирования, состоящей в нахождении максимального значения функции при ограничениях "с недостатком".

Две следующие задачи называются ***симметричными взаимно двойственными*** задачами линейного программирования:

$F(X)=c_1x_1+c_2x_2+..+c_nx_n \to max,$ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+..+a_{1n}x_n \le b_1, \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+..+a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$ $x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,n}.$	$G(Y)=b_1y_1+b_2y_2+..+b_my_m \to min,$ $\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+..+a_{m1}y_m \ge c_1, \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+..+a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases}$ $y_i \ge 0, \ \ i=\overline{1,m}.$

Обе двойственные задачи линейного программирования обладают следующими свойствами:

1) в одной задаче ищут максимум целевой функции, в другой - минимум;

2) обе задачи являются стандартными задачами линейного программирования, причем в задаче о максимуме все неравенства вида "≤", а в задаче о минимуме - вида "≥" ;

3) матрица системы ограничений одной задачи является транспонированной к матрице системы ограничений другой;

4) коэффициенты при переменных целевой функции одной задачи являются свободными членами ограничений другой;

5) число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче;

6) условия неотрицательности имеются в обеих задачах.

Свойствами двойственных задач следует руководствоваться при их составлении.

1.5. Целочисленное программирование

Значительная часть задач по смыслу может иметь решения только в целых числах; например, число турбин, судов, животных может быть только целым числом. Такие задачи решаются методами целочисленного программирования. Общая постановка задачи линейного программирования дополняется требованием о том, чтобы найденные переменные в оптимальном плане были целыми.

Задачи целочисленного программирования решаются в Excel теми же средствами, что и общие задачи линейного программирования. В отличие от задач линейного программирования, при решении задач целочисленного программирования необходимо добавить указание на то, что разыскиваемые оптимальные значения переменных могут принимать только целые значения. Для этого в окне "Добавление ограничения" нужно выбрать в списке, расположенном посередине, значение "цел", как показано в следующем примере.

Пример 2.3. На мебельной фабрике изготавливают столы, стулья и табуреты. На производство одного изделия требуется 1,5, 1 и 0,62 м^3 древесины. При этом затраты рабочего времени при изготовлении стола составляют 5 машино-часов, стула - 1,5 машино-часа и табурета - 0,7 машино-часа. Всего для производства мебели фабрика может ежедневно использовать 12 м^3 древесины. Оборудование может быть занято в течение 26 машино-часов. Прибыль от реализации стола, стула и табуретки равна 200, 30 и 15 руб. соответственно. Фабрика должна ежедневно производить не менее двух столов. На производство другой продукции ограничений нет. Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготавливать фабрике, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

Решение.

Составим вспомогательную таблицу:

	Стол	Стул	Табурет	Ограничение ресурсов
Древесина, м3	1,5	1	0,62	12
Рабочее время, маш.-час.	5	1,5	0,7	26
Прибыль за 1 шт., руб.	200	30	15	

Определим переменные модели:

x_1 - ежедневное производство столов (шт.);

x_2 - ежедневное производство стульев (шт.);

x_3 - ежедневное производство табуретов (шт.).

Используя эти переменные, далее строим целевую функцию:

$f(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 30x_2 + 15x_3 \to max.$

Запишем ограничения:

$1.5x_1 + x_2 + 0.62x_3 \le 12,$

$5x_1 + 1.5x_2 + 0.7x_3 \le 26,$

$x_1 \ge 2,\ x_{2,3} \ge 0.$

Решение в Excel:

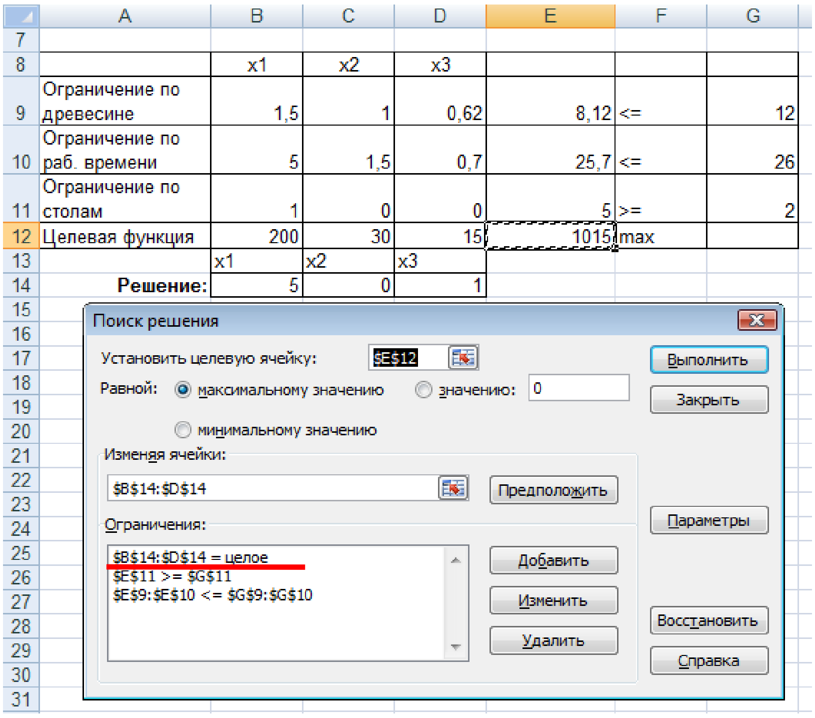


Рис. 2.4. Решение задачи целочисленного программирования

1.6. Симплекс-метод решения ЗЛП

Графический способ решения задачи ЛП показывает, что оптимальное решение этой задачи всегда ассоциируется с *угловой* *точкой* пространства решений (в математике она также называется крайней точкой множества). Это является ключевой идеей при разработке общего алгебраического *симплекс-метода* для решения любой задачи линейного программирования.

Переход от геометрического способа решения задачи ЛП к симплекс-методу лежит через алгебраическое описание крайних точек пространства решений. Для реализации этого перехода сначала надо привести задачу ЛП к стандартной форме, преобразовав неравенства ограничений в равенства путем введения дополнительных переменных.

Стандартная форма задачи ЛП необходима, потому что она позволяет получить базисное решение (используя систему уравнений, порожденную ограничениями). Это (алгебраическое) базисное решение полностью определяет все (геометрические) крайние точки пространства решений. Симплекс-метод позволяет эффективно найти оптимальное решение среди всех базисных.

1.6.1. Стандартная форма ЗЛП

Задача, в которой требуется найти экстремум функции

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min),$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1, n},$$

называется **задачей линейного программирования, заданной в канонической (стандартной) форме**.

Стандартная форма записи задачи ЛП предполагает выполнение следующих требований.

1. Все ограничения (включая ограничения неотрицательности переменных) преобразуются в равенства с неотрицательной правой частью.

2. Все переменные неотрицательные.

3. Целевую функцию следует или максимизировать, или минимизировать.

Преобразование неравенств в равенства

Неравенства любого типа (со знаками неравенств $\leq$ или $\geq$) можно преобразовать в равенства путем добавления в левую часть неравенств дополнительных (балансных) переменных – *остаточных* или *избыточных*, которые связаны с неравенствами типа «$\leq$» или «$\geq$» соответственно.

Для неравенств типа «≤» в левую часть неравенства вводится неотрицательная переменная. Например, в модели компании Mikks, ограничение на количество сырья С1 задается в идее неравенства $6x_1 + 4x_2 \le 24$.

Вводя новую неотрицательную переменную s_1, которая показывает остаток (неиспользованное количество) сырья С1, это ограничение преобразуется в равенство $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$, $s_1 \ge 0$.

Неравенства типа «≥» в задачах ЛП обычно устанавливают нижнюю границу чего-либо. *Избыточная переменная* определяет превышение значения левой части неравенства над этой границей. Так, в модели «диеты» неравенство $x_1 + x_2 \ge 800$ показывает, что суточное производство пищевой добавки не должно быть меньше 800 фунтов. Математически это неравенство эквивалентно равенству $x_1 + x_2 - S_1 = 800$, $S_1 \ge 0$.

Положительное значение избыточной переменной $S_1 \ge 0$ показывает превышение суточного производства добавки над минимальным значением 800 фунтов.

Пример 2.4.

Преобразуем следующую задачу ЛП в стандартную форму:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to max;$$

при выполнении следующих условий:

$$x_1 + x_2 - x_3 \ge -5,$$
$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Для преобразования задачи в стандартную форму выполним следующие действия.

1. Вычтем из левой части первого неравенства дополнительную (избыточную) переменную $S_1 \ge 0$ и затем умножим все неравенство на -1, для того чтобы правая часть неравенства стала положительной.
2. Добавим дополнительную (остаточную) переменную s_2 к левой части второго неравенства.
3. Так как третье ограничение изначально записано в виде равенства, поэтому оставляем его без изменения.

Получаем следующую **стандартную** задачу линейного программирования.

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max;$$

при выполнении следующих условий:
$- x_1 - x_2 + x_3 - S_1 = 5,$
$- 6x_1 + 7x_2 - 9x_3 + s_2 = 4,$
$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10,$
$x_1, x_2, x_3, S_1, s_2 \geq 0.$

1.6.2. Основы симплекс-метода

Рассмотрим общую ЗЛП с m ограничениями и n переменными, записанную в стандартной (канонической) форме

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min, \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&\ldots \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
&x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Как правило, число уравнений задачи меньше числа переменных (т.е. $m < n$), поэтому множество ее допустимых решений равно ∞. Задача состоит в том, чтобы найти наилучшее решение в смысле принятого критерия (минимума целевой функции).

Мы уже говорили, что оптимальное решение представляет собой одну из вершин многогранника допустимой области. Другими словами, оптимальное решение - это одно из базисных решений.

Получение одного из базисных решений основано на известном классическом методе решения систем линейных уравнений – методе Гаусса-Жордана.

Основная идея этого метода состоит в сведении системы m уравнений с n неизвестными к *каноническому* или *ступенчатому* виду при помощи элементарных операций над строками:

1) умножение любого уравнения системы на положительное или отрицательное число;

2) прибавление к любому уравнению другого уравнения системы, умноженного на положительное или отрицательное число.

При использовании первых m переменных такая система имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + a^0_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a^0_{1,s}x_s + \ldots + a^0_{1,n}x_n = b^0_1; \\
&x_k + a^0_{k,m+1}x_{m+1} + \ldots + a^0_{k,s}x_s + \ldots + a_{k,n}x_n = b^0_k; \\
&x_m + a^0_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a^0_{m,s}x_s + \ldots + a_{m,n}x_n = b^0_m.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Переменные $x_1, \ldots, x_m$, входящие с единичными коэффициентами в одно уравнение системы (2.2) и с нулевыми в остальные, называются *базисными*. В канонической системе каждому уравнению соответствует ровно одна базисная переменная.

Остальные $(n-m)$ переменные $(x_{m+1},\dots,x_n)$называются *небазисными* переменными.

При записи системы в каноническом виде все ее решения можно получить, присваивая независимым переменным произвольные значения и решая затем получающуюся систему относительно базисных переменных.

Определение. Базисным решением системы (2.2) называется решение, полученное при нулевых значениях небазисных переменных.

Например, в системе (2.2) одно из базисных решений задается как

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_1^0, \quad x_2 = b_2^0, \dots, \quad x_m = b_m^0; \\ x_{m+1} = 0; \dots; \quad x_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

Определение. Базисное решение называется *допустимым* базисным решением, если значения входящих в него базисных переменных $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,m}$, что эквивалентно условию $b_j^0 \geq 0, \quad j = \overline{1,m}$.

Т.к. различные базисные решения системы (2.2) соответствуют различным вариантам выбора (m) из общего числа (n) переменных x_j, то число допустимых базисных решений (угловых точек) не превышает $c_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Поэтому ЗЛП можно решать посредством перебора конечного числа угловых точек допустимого множества S, сравнивая значения ЦФ в этих точках. Это наихудший вариант решения ЗЛП, т.к. требует огромного объема вычислений.

Пример: если $n = 50, \quad m = 25$ (задача небольшой размерности), то количество переборов составит $1.26 \cdot 10^{14}$ (кол-во вариантов).

Обычно $n = 1500 \div 2000; \quad m = 1000 \div 1500$.

Идея симплекс-метода (СМ) состоит в направленном переборе угловых точек допустимого множества S с последовательным уменьшением ЦФ $f(x)$. СМ разработал **Дж. Данциг** (американский ученый) в 1947 г. Этот метод называют также методом ***последовательного улучшения решения (плана)***. Гарантии результативности СМ обеспечиваются следующей теоремой.

Теорема (*о конечности алгоритма симплекс-метода*). Если существует оптимальное решение ЗЛП, то существует и базисное оптимальное решение. Это решение может быть получено через конечное число шагов симплекс-методом, причем, начать можно с любого исходного базиса.

1.6.3. Вычислительный алгоритм симплекс-метода

Рассмотрим работу алгоритма на примере компании Mikks. Приведем еще раз ее математическую модель:

$f = 5x_1 + 4x_2 \to max$

при выполнении следующих ограничений:

$6x_1 + 4x_2 \leq 24,$

$x_1 + 2x_2 \leq 6,$

$-x_1 + x_2 \leq 1,$

$x_2 \leq 2,$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Эта задача в стандартной форме записывается так:

$f = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

при выполнении следующих ограничений:

$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24,$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$

$-x_1 + x_2 + x_5 = 1,$

$x_2 + x_6 = 2,$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$

Здесь $x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ - дополнительные (остаточные) переменные, добавленные в неравенства для преобразования их в равенства.

Ручные вычисления по симплекс-методу удобно оформлять в виде так называемых симплекс-таблиц (СТ).

Базисные переменные	x_1	x_2	Свободные члены
x_3	6	4	24
x_4	1	2	6
x_5	-1	1	1
x_6	0	1	2
f	-5	-4	0

Замечание. Если целевую функцию необходимо максимизировать, то предварительно нужно умножить ее на (–1).

Сформулируем алгоритм СМ применительно к данным, внесенным в таблице.

Шаг 1. Выяснить, имеются ли в последней строке таблицы отрицательные числа (значение в последнем столбце не принимается во внимание). Если все числа неотрицательны, то процесс закончен; базисное решение $(0,0,24,6,1,2)$ является оптимальным; $f^* = 0$.

Если в последней строке имеются отрицательные числа, перейти к Шагу 2.

Шаг 2.

Просмотреть столбец, соответствующий наименьшему отрицательному числу и выяснить, имеются ли в нем положительные числа. Если ни в одном из таких столбцов нет положительных чисел, то оптимального решения не существует.

Если найден столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент, отметить его и перейти к Шагу 3.

Шаг 3. Разделить свободные члены на соответствующие положительные числа из выделенного столбца и выбрать наименьшее частное. Отметить строку, соответствующую наименьшему частному (горизонтальной стрелкой). Выделить разрешающий элемент a_{jk}^0, стоящий на пересечении отмеченных строки и столбца. Перейти к Шагу 4.

Шаг 4.

1. Поменять местами переменные x_k и x_j, остальные переменные оставить на прежних местах.

2. На место опорного элемента поставить число $\frac{1}{a_{jk}^0}$.

3. На остальных местах разрешающей (опорной) строки записать соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.

4. На свободные места разрешающего столбца поставить со знаком минус соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.

Шаг 5.

Оставшиеся свободные места в новой СТ заполнить построчно следующим образом: из строки элементов исходной таблицы вычесть произведение ее элемента из разрешающего столбца на уже заполненную разрешающую строку новой таблицы.

На этом заполнение новой таблицы заканчивается и происходит переход к Шагу 1.

Пример 2.5. *Приведем ход решения задачи* по данному алгоритму:

Базисные переменные	x_1	x_2	Свободные члены
x_3	6	4	24
x_4	1	2	6
x_5	-1	1	1
x_6	0	1	2
f	-5	-4	0

Базисные переменные	x_3	x_2	Свободные члены
x_1	0,17	0,67	4,00
x_4	-0,17	1,33	2,00
x_5	0,17	1,67	5,00
x_6	0,00	1,00	2,00
f	0,83	-0,67	20,00

Базисные переменные	x_3	x_4	Свободные члены
x_1	0,25	-0,50	3,00
x_2	-0,13	0,75	1,50
x_5	0,38	-1,25	2,50
x_6	0,13	-0,75	0,50
f	0,75	0,50	21,00

Ответ: $x^* = (3,\ 1.5,\ 0,\ 0, 2.5,\ 0.5)$; $f^* = 21$.

1.7. Транспортная задача

Транспортная задача является особым типом задач целочисленного программирования, для которых разработаны простые и эффективные способы нахождения оптимального решения, не требующие громоздких вычислений. Экономико-математическую модель транспортной задачи рассмотрим на следующем примере.

Пример 2.6. Имеются три поставщика некоторого товара и четыре потребителя этого товара. Причём известна стоимость перевозки товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Требуется найти объёмы перевозок для каждой пары "поставщик - потребитель" так, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальны, запасы всех поставщиков реализованы и потребности всех потребителей удовлетворены (табл.2.1).

Таблица 2.1.

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 x_{11}	2 x_{12}	4 x_{13}	8 x_{14}	340
A_2	8 x_{21}	9 x_{22}	6 x_{23}	5 x_{24}	200
A_3	3 x_{31}	5 x_{32}	7 x_{33}	2 x_{34}	160
Спрос потребителей, b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$

В левом верхнем углу произвольной клетки стоит коэффициент, равный стоимости перевозки от поставщика, номер которого указан в этой строке, к потребителю, номер которого указан в столбце.

В теории транспортной задачи таблица вида табл. 2.1 называется **таблицей поставок**.

Построим экономико-математическую модель данной задачи, обозначив через x_{ij} объем поставляемого товара от *i* -го поставщика к *j*- му потребителю. Чтобы запасы каждого поставщика были полностью реализованы, должны быть справедливы уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок, т. е. выполняться равенства

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 340; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 160. \end{cases} \quad (2.4)$$

Чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворён, должны быть справедливы уравнения баланса для каждого столбца таблицы поставок, то есть

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 170; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 260. \end{cases} \quad (2.5)$$

Поскольку объём перевозимого груза величина неотрицательная, то должны выполняться ограничения на переменные x_{ij}:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3,4.$$

Суммарные затраты *F* на перевозку определяются указанными в таблице поставок тарифами перевозок и размерами поставок:

$$F = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_{ij} = 7x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14} + 8x_{21} + 9x_{22} + 6x_{23} + \\ + 5x_{24} + 3x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 2x_{34}. \qquad (2.6)$$

Решить транспортную задачу - значит *на множестве неотрицательных решений системы ограничений найти такое решение, при котором линейная функция принимает минимальное значение*.

Транспортная задача называется ***закрытой (сбалансированной),*** если сумма запасов всех *n* поставщиков равна сумме потребностей всех *m* потребителей:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

В противном случае транспортная задача называется ***открытой.*** Решение открытой транспортной задачи сводят к решению закрытой транспортной задачи введением фиктивных потребителей, когда сумма запасов превышает сумму потребностей, или фиктивных поставщиков, когда сумма потребностей превышает сумму запасов. При этом тарифы перевозок для фиктивных поставщиков и потребителей принимаются равными нулю.

Число основных (базисных) переменных закрытой транспортной задачи равно $m + n - 1$, где n − число поставщиков; m − число потребителей; так как в закрытой транспортной задаче сумма запасов всех поставщиков равна сумме потребностей всех потребителей.

При заполнении таблицы поставок клетки, соответствующие неосновным (свободным) переменным, оставляют пустыми, а в клетки, соответствующие базисным переменным, проставляют числа, определяющие количество поставки x_{ij}. В частности, если транспортная задача вырожденная, некоторые поставки могут иметь нулевую величину и в этом случае в базисную клетку записываем число 0.

Нахождение первоначального базисного распределения – опорного плана задачи − возможно любым из известных методов: наименьшей стоимости, "северо-западного угла", Фогеля, наибольшего предпочтения.

Рассмотрим ***метод "северо-западного угла".*** "Северо-западным углом" называется ячейка таблицы поставок, соответствующая значению переменной x_{11}. В эту ячейку записываем максимально возможную поставку, определяя её по формуле

$$x_{11} = min(a_1; b_1) = D. \tag{2.7}$$

Если $D = a_1$, то запас первого поставщика распределен полностью, и переходим к заполнению клетки с x_{21}, записывая в неё наименьшее из чисел a_2 и $b_1 - D$. Если $D = b_1$, то полностью удовлетворена потребность первого потребителя, тогда переходим к заполнению клетки с x_{12}, записывая в неё наименьшее из чисел $a_1 - D$ и b_2. Так, постепенно двигаясь по таблице поставок, распределяем все запасы и удовлетворяем все потребности. Движение по таблице поставок может быть или по горизонтали, или строго по вертикали, а повороты при движении по трассе делаются только под прямым углом.

При заполнении таблицы следим за выполнением баланса по строкам и столбцам. Число заполненных клеток в полученном распределении должно быть равным числу базисных (основных) переменных. Если поворот происходит в клетке, где размер поставки равен нулю, то говорят о вырожденном плане поставок. В этом случае нулевая поставка записывается в клетку, где трасса распределения поставок делает поворот, и клетка считается занятой.

Если распределение выполняется без вычислительных ошибок, в последнюю заполняемую клетку запишется число, получаемое автоматически и равное остатку нераспределённых количеств у последнего из участвующих в распределении поставщиков или количеству неудовлетворённого спроса последнего потребителя.

Получаемое распределение по методу "северо-западного угла" для транспортной задачи, исходные данные которой содержатся в табл. 2.1, показано в табл. 2.2.

Найденный опорный план записывается матрицей

$$X_0 = \begin{pmatrix} 120 & 170 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix},$$

а значение целевой функции на этом плане, равное стоимости поставок, равно

$$F = 7 \cdot 120 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2800.$$

Таблица 2.2.

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 120	2 170	4 50	8	340
A_2	8	9	6 100	5 100	200
A_3	3	5	7	2 160	160
Спрос потребителей, b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$

Другим методом определения опорного плана поставок является ***метод наименьшей стоимости***.

В первую очередь при определении объёмов поставок занимают клетки, имеющие наименьшие тарифы перевозок. Так, в рассматриваемом примере начнём с клетки (A_1, B_2), имеющей тариф 2. От первого поставщика ко второму потребителю поставим максимально возможное количество груза, а именно $x_{12} = \min\{340,170\} = 170$. Потребности второго потребителя полностью удовлетворены, и все клетки второго столбца далее не рассматриваем.

На втором шаге распределения выбираем клетку (A_3, B_4) с тарифом 2 и делаем в неё поставку $x_{34} = \min\{160,260\} = 160$. Теперь запас третьего поставщика полностью израсходован и все клетки третьей строки далее не рассматриваем.

Соответственно, по наименьшим значениям остающихся неиспользованными в табл. 2.3 тарифов делаем следующие поставки:

$$x_{13} = min\{340 - 170,150\} = min\{170,150\} = 150;$$
$$x_{24} = min\{200,260 - 160\} = min\{200,100\} = 100;$$
$$x_{11} = min\{340 - 150 - 170,120\} = min\{20,120\} = 20;$$
$$x_{21} = min\{200 - 100,120 - 20\} = min\{100,100\} = 100.$$

Последняя поставка получается автоматически, так как остаётся только одна клетка для заполнения и туда помещается остаток запасов и потребностей. Они равны, поскольку сумма всех запасов и сумма всех потребностей равны.

Таблица 2.3.

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 20	2 170	4 150	8	340
A_2	8 100	9	6	5 100	200
A_3	3	5	7	2 160	160
Спрос потребителей, b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$

Найденный опорный план записывается матрицей

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 170 & 150 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix},$$

а значение целевой функции на этом плане равно

$$F = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2700.$$

Методом наименьшей стоимости получился лучший опорный план, так как значение целевой функции на нем меньше на 100 единиц. Тем не менее, и этот план может быть не оптимальным.

Критерий оптимальности для транспортной задачи: базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток неотрицательны.

Для определения оценок свободных клеток используют два взаимозаменяемых метода: распределительный и потенциалов. Рассмотрим один из них, а именно ***метод потенциалов***.

Потенциалы - числа для нахождения оценок допустимого плана, полученного в ходе распределения запасов поставщиков. Потенциалы для поставщиков и потребителей вычисляются по тарифам c_{ij} ***занятых*** клеток таблицы поставок. Для потенциалов поставщиков u_i и потребителей v_j, соответствующих занятым клеткам, справедливы равенства

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m; \quad j = 1,\ldots,n. \tag{2.8}$$

Так как занятых клеток на одну меньше, чем число потенциалов, значение одного из потенциалов (все равно какого) назначается произвольно и может быть любым действительным числом (обычно полагают равным нулю, чтобы не усложнять вычисления остальных потенциалов).

Разрешая равенства (2.8) относительно потенциалов, получаем их числовые значения. Оценки ***свободных*** клеток таблицы поставок рассчитываются по формулам

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j), \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n. \qquad (2.9)$$

Если построенное первоначальное решение не удовлетворяет критерию оптимальности, то среди свободных клеток, имеющих отрицательную оценку, выбираем ту, для которой абсолютная величина оценки наибольшая. Отмечаем эту клетку знаком " + " и строим из неё ***цикл***.

Циклом в таблице поставок называют ломаную линию, проходящую через занятые клетки, начинающуюся и заканчивающуюся в одной и той же свободной клетке. Эта ломаная линия имеет вершины в клетках и звенья, лежащие вдоль строк и столбцов таблицы поставок. Причём ломаная должна быть связной, и в каждой вершине ломаной встречаются два звена, одно из которых располагается по строке, а другое − по столбцу. Клетки, через которые проходит ломаная линия, не делая в них поворота, называются ***транзитными***, и имеющиеся в них поставки не участвуют в процессе перераспределения. Таким образом, цикл проходит через занятые клетки и только через одну свободную клетку, начинаясь и заканчиваясь в ней.

Последовательно отмечаем вершины цикла знаками " + " и " − " так, чтобы соседние вершины были отмечены противоположными знаками.

Среди поставок, находящихся в клетках помеченных знаком "−", выбираем наименьшую и помещаем ее в пустую клетку, помеченную знаком " + ". Затем рассчитываем новые значения поставок, прибавляя выбранное число ко всем поставкам, стоящим в клетках, помеченных знаком " + ", и вычитая его из всех поставок, стоящих в клетках, помеченных знаком " − ". Для вновь полученного плана поставок рассчитываем по занятым клеткам потенциалы, а затем оценки новых свободных клеток.

Если критерий оптимальности выполняется для полученного плана, то задача решена. В противном случае продолжаем процесс перераспределения поставок до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение транспортной задачи.

Для вычисления оценки свободной клетки (A_s, B_k) таблицы поставок ***распределительным методом*** необходимо построить цикл для неё и найти оценку по формуле

$$\delta_{sk} = c_{sk} - c_{s,k+1} + c_{s-1,k+1} - \dots + c_{s+1,k-1} - c_{s+1,k},$$

где записаны в порядке прохождения цикла с чередованием знаков "+" и "-" тарифы перевозок для всех клеток, образующих цикл оцениваемой свободной клетки.

Пример 2.7. Решить транспортную задачу с опорным планом, заданным в табл. 2.3, методом потенциалов.

Вычислим потенциалы для занятых клеток и результаты расчётов поместим в табл. 2.4:

$u_1 = 0; \quad u_1 + v_1 = c_{11} \to o + v_1 = 7 \to v_1 = 7;$

$u_1 + v_2 = c_{12} \to 0 + v_2 = 2 \to v_2 = 2;$

$u_1 + v_3 = c_{13} \to 0 + v_3 = 4 \to v_3 = 4;$

$u_2 + v_1 = c_{21} \to u_2 + 7 = 8 \to u_2 = 8 - 7 = 1;$

$u_2 + v_4 = c_{24} \to 1 + v_4 = 5 \to v_4 = 5 - 1 = 4;$

$u_3 + v_4 = c_{34} \to u_3 + 4 = 2 \to u_3 = 2 - 4 = -2.$

Рассчитаем оценки свободных клеток таблицы поставок:

$\delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 8 - 0 - 4 = 4 > 0;$

$\delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 9 - 1 - 2 = 6 > 0;$

$\delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 6 - 1 - 4 = 1 > 0;$

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 + 2 - 7 = -2 < 0;$

$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 + 2 - 2 = 5 > 0;$

$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 7 + 2 - 4 = 5 > 0.$

Таблица 2.4.

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i	Потенциалы u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 20	2 170	4 150	8	340	$u_1 = 0$
A_2	8 - 100	9	6	5 + 100	200	$u_2 = 1$
A_3	3 +	5	7	2 - 160	160	$u_3 = -2$
Спрос потребителей, b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$	
Потенциалы v_j	$v_1 = 7$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 4$		

Среди найденных оценок одна меньше нуля, следовательно, найденный план не является оптимальным. Делаем перераспределение поставки в клетку (A_3, B_1). Цикл, найденный для перемены плана поставок, показан в табл. 2.4.

Находим размер перемещаемой в клетку (A_3, B_1) поставки по размерам отмеченных знаком "-" поставок, а именно:

$$x_{31} = \min(x_{21}, x_{34}) = \min(100, 160) = 100.$$

Прибавляем число 100 к поставкам, отмеченным знаком "+", вычитаем число 100 из поставок, отмеченных знаком "−", новое получаем распределение поставок. Заносим результаты в новую таблицу поставок (табл. 2.5). Для вновь полученного плана поставок и по тарифам занятых клеток считаем значения потенциалов.

Таблица 2.5.

Поставщики	Потребители				Запасы поставщиков, a_i	Потенциалы u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 20	2 170	4 150	8	340	$u_1 = 0$
A_2	8	9	6	5 200	200	$u_2 = -1$
A_3	3 100	5	7	2 60	160	$u_3 = -4$
Спрос потребителей, b_j	120	170	150	260	$\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$	
Потенциалы v_j	$v_1 = 7$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 6$		

Находим оценки свободных клеток:

$\delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 8 - 0 - 6 = 2 > 0;$
$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 8 + 1 - 7 = 2 > 0;$
$\delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 9 + 1 - 2 = 8 > 0;$
$\delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 6 + 1 - 4 = 3 > 0;$
$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 + 4 - 2 = 7 > 0;$
$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 7 + 4 - 4 = 7 > 0.$

Для найденного плана

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 170 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \\ 100 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем значение целевой функции:

$$F = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 + 5 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 60 = 2500.$$

Поскольку все оценки свободных клеток положительные, **найденный план** является **оптимальным** планом транспортной задачи. Минимальная стоимость перевозок определяется значением целевой функции на этом плане, и она равна 2500 денежных единиц.

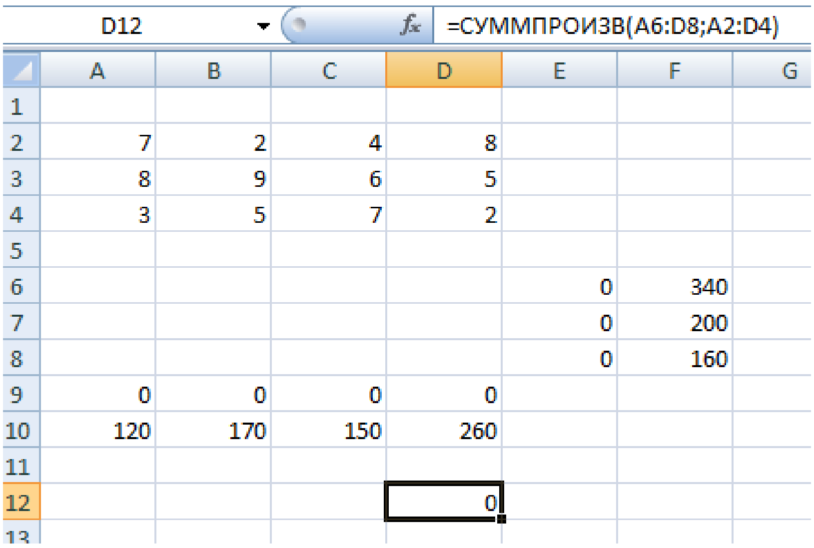
1.8. Решение транспортной задачи в Excel

Решим средствами Excel задачу, представленную табл. 2.1. Исходные условия этой задачи представлены в таблице листа Excel на рис. 2.5.

В ячейках с A2 по D4 представлена таблица стоимостей (тарифов) перевозок. При этом столбцы, обозначенные буквами A, B, C, D, соответствуют первому, второму, третьему и четвёртому потребителям, а строки с номерами "2", "3", "4" соответствуют первому, второму и третьему поставщикам.

Ячейки с A6 по D8 зарезервированы под таблицу объёмов поставок (перевозок).

В строке с номером "10" указаны величины спроса каждого из потребителей. А в столбце, обозначенном буквой "F", – запасы каждого из поставщиков.



D12 fx =СУММПРОИЗВ(A6:D8;A2:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	7	2	4	8			
3	8	9	6	5			
4	3	5	7	2			
5							
6					0	340	
7					0	200	
8					0	160	
9	0	0	0	0			
10	120	170	150	260			
11							
12				0			
13							

Рис. 2.5. Исходные данные транспортной задачи

Для того чтобы воспользоваться возможностями, предоставляемыми пунктом меню "***Поиск решения...***", в ячейку D12 вводим формулу для вычисления целевой функции:

=СУММПРОИЗВ(A6:D8;A2:D4).

В ячейках A9:D9 записываем формулу суммирования трех вышестоящих ячеек. Например, в ячейке A9 будет формула: =СУММ(A6:A8).

В ячейках E6:E8 записываем формулу суммирования четырех ячеек, находящихся слева. Например, в ячейке E6 будет формула: =СУММ(A6:D6).

Затем открываем окно "Поиск решения". Значения, которые нужно ввести непосредственно в окне "Поиск решения", а также полученный результат, указаны на рис. 2.6.

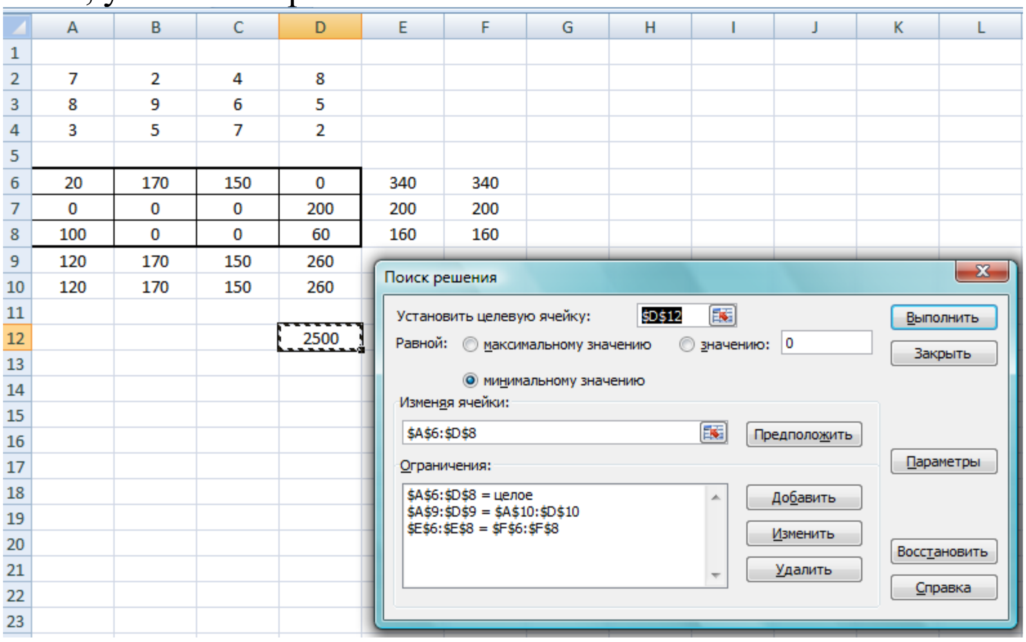


Рис. 2.6. Решение транспортной задачи